

Математические модели в инвестиционных банках Опционы. Лекция 1

Михаил Андреев

март 2016

Технологический центр Дойче Банка





Опцион

контракт, по которому покупатель опциона получает право, но не обязательство, совершить покупку или продажу какого-то базового актива (underlying) по заранее оговорённой цене в определённый договором момент в будущем.

Покупатель опциона получает по контракту **право** совершить сделку. При этом продавец опциона несет **обязательство** покупки/продажи актива на оговоренных в контракте условиях.

Основные бизнес сценарии

- Как страховка. Корпоративные финансы.
- Как инструмент спекуляции. Hedge funds.
- Market maker



Основные параметры опционов

- тип опциона: Европейский, ...
- право на покупку или продажу : call / put
- сторона опционного контракта : long / short
- strike, expiry date (maturity date), ...
- underlying - базовый актив, право на покупку или продажу которого дает опцион

Разные случаи базового актива (underlying)

- Equity options
- FX options. Commodity options
- Опцион на индекс. Опцион на производный инструмент (compound options, swaptions). ...



Задачи связанные с опционами

- Расчет цены (Pricing)
- Risk management
- Стратегии применения в финансовой деятельности



Формула выплаты для случая long

Call опцион: $Payoff = \max(0, Spot - Strike)$

Put опцион: $Payoff = \max(0, Strike - Spot)$

► Payoff1 - pdf

► Payoff2 - pdf



дискретное время

Если стоимость денежного потока сегодня PV .

При зачислении процентов раз в год. При процентной ставке (interest rate) r , через t лет:

$$F = (1 + r)^t PV \implies PV = \frac{1}{(1 + r)^t} F = D(t) \cdot F$$

где $D(t)$ — коэффициент дискантирования (discount factor).

Если выплаты происходят n раз в год, то

$$D(t) = \frac{1}{(1 + \frac{r}{n})^{nt}}$$

непрерывное время

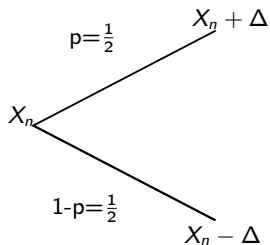
$$D(t) = e^{-rt}$$



$$P - C + S = D \cdot K$$

$$C - P = S - D \cdot K$$

Случайное блуждание



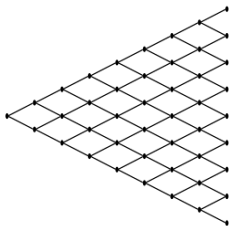
Дискретное время (t_n , с шагом Δ_t).
 $X_{n+1} = X_n \pm \Delta$; $X_0 = 0$

$$E[X_n] = 0$$

$$\text{Var}[X_n] = n\Delta^2$$

Если положить $\Delta = \sqrt{\frac{T}{n}}$, то

$$\text{Var}[X(T)] = T$$





- Непрерывное время (t)
- $W(t)$ непрерывна, $W(0) = 0$
- Изменения на непересекающихся промежутках времени - независимы
- $W_{t+s} - W_t \sim \mathcal{N}(0, s)$
- Каждое ΔW это сумма большого кол-ва i.i.d. случайных факторов
 $\Rightarrow$ (по центральной предельной теореме) $\Delta W \sim \mathcal{N}$
- $E(W(t)) = 0$
- $\text{Var}(W_{t+s} - W_t) = s$



- 1827 Robert Brown
- 1900 Louis Bachelier
- 1905 Albert Einstein
- 1920s Norbert Wiener
- 1940s - 50s Kiyosi Itô



Если $x(t)$ такая, что:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dW_t$$

То для $f(x, t)$

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2$$

$$dt^2 = 0; dt dW_t = 0; dW_t^2 = dt$$

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + a(x, t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{b^2(x, t)}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + b(x, t)\frac{\partial f}{\partial x}dW_t$$



$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW_t$$

μ — drift, σ — volatility

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW_t$$

$$d \ln S = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW_t$$

$$S(t) = S_0 e^{\mu t} \exp\left(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$$

$$E[S(t)] = S_0 e^{\mu t}$$



Гипотеза эффективного рынка

Развитие идей классической и неоклассической экономики о рациональном поведении участников рынка. Современный вариант - Eugene Fama 1970.

- Вся доступная информация об активе уже содержится в его рыночной цене.

⇒ GBM логичная модель для описания движения рыночной цены.

Risk

$$Profit \sim Risk$$

⇒ форвардная цена для любого безрискового портфеля определяется risk-free процентной ставкой.



Публикации - 1973. Нобелевская премия - 1997.

► Black-Scholes - pdf

"The Greeks". Индикаторы риска



Если текущая цена опциона опциона V .

Название	Определение	Для модели Блэка-Шульца (Европейский call опцион)
Delta	$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$	$e^{-q\tau} N(d_+)$
Gamma	$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$	$e^{-q\tau} \frac{N'(d_+)}{S\sigma\sqrt{\tau}}$
Theta	$\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$	$= -\frac{\partial V}{\partial \tau} = -e^{-q\tau} \frac{SN'(d_+)\sigma}{2\sqrt{\tau}}$ $+ qSe^{-q\tau} N(d_+) - rKe^{-r\tau} N(d_-)$
Vega	$\nu = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$	$SN'(d_+)\sqrt{\tau}$
Rho	$\rho = \frac{\partial V}{\partial r}$	$K\tau e^{-r\tau} N(d_-)$



ограничения модели, пути расширения

- распределение $\frac{dS}{S}$ на практике расходится с нормальным
 - fat tails
 - jumps
 - not i.i.d., clustering
- $\sigma = \sigma(S, t) \neq \text{Const}$
- $r = r(t) \neq \text{Const}$



- Ширяев А.Н. – Основы стохастической финансовой математики
- Mark S. Joshi – The Concepts and Practice of Mathematical Finance
- Paul Wilmott on Quantitative Finance
- Hull, John C. – Options, Futures and Other Derivatives / Джон К. Халл – Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты